

第7章 参数估计

7.1 点估计

7.2 估计量的评选标准

7.3 区间估计

7.4 正态总体参数的区间估计

➤ 什么是参数估计?

- 参数是刻画总体某方面概率特性的数量. 参数的取值范围称为参数空间, 记为 Θ
- 当此数量未知时, 从总体抽出一个样本, 用某种方法对这个未知参数进行估计就是参数估计

例如, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- 若 μ, σ^2 未知, 通过构造样本的函数, 给出它们的估计值或取值范围就是参数估计的内容
- ✓ 点估计 —— 估计未知参数的值
- ✓ 区间估计 —— 估计未知参数的取值范围, 并使此范围包含未知参数真值的概率为给定的值

7.1 点估计

- 设总体 X 的分布函数的形式已知，但是它的某些参数是未知的，通过总体的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为参数的点估计问题。

1. 矩估计法

2. 最大似然估计法

3. 特殊方法

➤ 点估计问题的一般提法:

- 设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ 为待估计的参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是相应的样本值, 点估计就是用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造 l 个适当的统计量

$$\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

称 $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量. 称 $\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的估计值.

估计量和估计值统称为估计, 并都简记为 $\hat{\theta}_i$.

1.矩估计法

k 阶样本矩

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

用样本(原点)矩作为总体(原点)矩的估计量的方法称为矩估计法。

➤ 设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ 为待估参数, 如果 $\alpha_k = E(X^k) (k=1, 2, \dots, l)$ 存在, α_i 为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ 的函数, 记 $\alpha_k = \alpha_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l) (k=1, 2, \dots, k)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的样本, 用 A_k 来估计 $E(X^k)$, 建立 l 个方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l) \\ A_2 = \alpha_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l) \\ \dots\dots\dots \\ A_l = \alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2, \dots, A_l) \\ \hat{\theta}_2 = \theta_2(A_1, A_2, \dots, A_l) \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\theta}_l = \theta_l(A_1, A_2, \dots, A_l) \end{array} \right.$$

用 $\hat{\theta}_i$ 作为 θ_i 的估计量-----矩估计量.

例1 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, $\theta > 0$ 未知,
 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 试求 θ 矩估计量.

解: 因为 $\alpha_1 = E(X) = \frac{\theta}{2}$, 由矩估计法, 令

$$\frac{\hat{\theta}}{2} = A_1 = \bar{X}$$

解得 θ 的矩估计量为, $\hat{\theta} = 2\bar{X}$.

例2 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 试用矩估计法求 λ 的估计值.

解: 因为 $\alpha_1 = E(X) = 1/\lambda$,

由矩估计法, 令 $1/\hat{\lambda} = A_1 = \bar{X}$

得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$

所以 λ 的矩估计值为 $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$

例3 设总体 X 的均值 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$ 都存在, 且 $\sigma^2 > 0$. 但 μ, σ^2 均为未知. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 求 μ, σ^2 的矩估计量.

解:
$$\begin{cases} \alpha_1 = E(X) = \mu \\ \alpha_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

解得 $\mu = \alpha_1, \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

由矩估计法,
$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

对任何总体, 总体均值与方差的矩估计量都不变.

➤ 常见分布的参数矩估计量

(1) 若总体 X 服从0-1分布, 则未知参数 p 的矩估计量为

$$\hat{p} = \bar{X}$$

(2) 若总体 $X \sim B(n, p)$, 则未知参数 p, n 的矩估计量为

$$\hat{n} = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{p} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

(3) 若总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则未知参数 μ, σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

(4) 若总体 $X \sim P(\lambda)$, 则未知参数 λ 的矩估计量为

$$\hat{\lambda} = \bar{X} \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

【注】矩估计法的优点和不足

优点：直观、简便,特别对总体期望和方差进行估计时不需要知道总体的分布.

不足：①要求总体原点矩存在,而有些随机变量的原点矩不存在,就不能用此法进行参数估计;

②矩估计量有时不唯一;

③没有利用总体分布函数所提供的信息,难保证有优良的性质.

2.最大似然估计法

- 最早由德国数学家高斯于1821年提出，后来英国统计学家费希尔在1912年重新提出并做了进一步的研究
- 它是目前点估计中最广泛应用的一种方法.该方法建立在最大似然原理的基础上

最大似然原理的直观想法:概率最大的事件最可能出现

- 参数估计的最大似然法是要选取这样的值来作为参数的估计值，使得当参数取这一数值时，观测结果出现的可能性为最大

➤ 思想方法：一次试验就出现的事件有较大的概率

例如：有两外形相同的箱子，各装100个球

第一箱 99个白球 1个红球

第二箱 1个白球 99个红球

现从两箱中任取一箱，并从箱中任取一球，结果所取得的球是白球

问：所取的球来自哪一箱？

答：第一箱

例4 设有两枚外形完全一样的硬币，一枚均匀的，另一枚不均匀，用 p 表示抛两枚硬币出现正面朝上的概率，已知对均匀硬币， $p=1/2$ ，对不均匀硬币， $p=2/3$ 。现在从这两枚硬币中随机选一枚，连续抛掷3次，结果其中有2次出现正面朝上，试问这枚硬币是那一枚比较合理？

解：用随机变量 X 表示抛掷硬币3次其中出现正面朝上的次数，则 $X \sim B(3, p)$

，而参数 p 的取值范围是 $\{1/2, 2/3\}$ 。两个不同的参数值对应两个不同的总体：一个对应一枚均匀硬币，另一个对应一枚不均匀硬币。

用 B 表示事件{连续抛掷3次硬币，其中有2次正面朝上}

$$\text{当 } p=1/2 \text{ 时, } P(B) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.375$$

$$\text{当 } p=2/3 \text{ 时, } P(B) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 0.4444$$

显然 $0.375 < 0.4444$ ，因此认为这枚硬币更像是均匀的那枚

➤ 似然函数

(1) **离散型总体** 设总体 X 分布律 $P\{X = x\} = p(x; \theta)$,
 $\theta \in \Theta$ 为待估参数, Θ 是 θ 可能取值的范围. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 样本观察值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则
 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

对固定的样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 记

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

称其为**样本的似然函数**

(2)连续型总体

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$ 为未知参数,
定义样本的似然函数为:

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

➤ **最大似然估计法**: 就是固定样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$,
在 θ 取值的可能范围 Θ 内挑选使似然函数达到最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计值.

定义 若存在 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使得 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计量

则称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值

如何求 $L(\theta)$ 的最大值?

由于 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在 Θ 上有相同的最大值点,所以求 $L(\theta)$ 的最大值点可以改为求 $\ln L(\theta)$ 的最大值点.

当 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微时, $\ln L(\theta)$ 的最大值点必满足:

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ -----对数似然方程}$$

当 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 不可微时, 回到定义求.

分布中含有多个未知参数时, 这时, 似然函数 L 是这些未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的函数. 分别令

$$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, k)$$

或令

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, k)$$

由此方程组可解得参数 θ_i 的极大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例5 设 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求参数 p 的最大似然估计量.

解 X 的分布律为 $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是相应于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 一个样本值, 故似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

于是 $\ln L(p) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln p + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-p)$

$$\text{令 } \frac{d}{dp} \ln L(p) = 0 \longrightarrow \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

似然估计值

似然估计量

例6 设 $X \sim P(\lambda)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求参数 λ 的最大似然估计量.

解: 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是相应于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 一个样本值

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$l(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda$$

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n$$

令 $\frac{dl(\lambda)}{d\lambda}=0$ 得:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0$$

解之得:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}$$

容易验证 $\frac{d^2 l(\lambda)}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i < 0$, 所以 $\ln L(\lambda)$

在 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 处取得最大值, 因此 $\hat{\lambda}$ 的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

例7 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, 又设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 X 的一组样本观测值, 试求 μ, σ^2 的最大似然估计值及估计量

解: X 的概率密度为 $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

似然函数为

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \end{aligned}$$

对数似然函数为

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

似然方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2 的极大似然估计量分别为 $\bar{X}, B_2$.

例8 设 $X \sim U(a, b)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 X 的一个样本值, 求 a, b 的极大似然估计值与极大似然估计量.

解: X 的密度函数为 $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a < x_i < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然似然函数**不显含样本值**, 因而无法用求导的方法求的极大似然估计值, 为此只能用定义求解

似然函数只有当 $a < x_i < b, i = 1, 2, \dots, n$ 时才能获得最大值, 且 a 越大, b 越小, L 越大.

令

$$x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

取

$$\hat{a} = x_{\min}$$

$$\hat{b} = x_{\max}$$

则对满足 $a \leq x_{\min} \leq x_{\max} \leq b$ 的一切 $a < b$,

都有

$$\frac{1}{(b-a)^n} \leq \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min})^n}$$

故 $\hat{a} = x_{\min}$, $\hat{b} = x_{\max}$ 是 a, b 的极大似然估计值.

$$X_{\min} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

分别是 a, b 的极大似然估计量.

当 $a=0$ 时, 总体 X 服从 $[0, b]$ 上的均匀分布, 同理可知 b 的**最大似然估计量**为

$$\hat{b} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

例1 (课本例7.2) 可以, b 的**矩估计量**为

$$\hat{b} = 2\bar{X}$$

7.2 估计量的评选标准

评价估计量的好坏一般从三方面考虑：**有无系统性误差；波动性的大小；当样本容量增大时估计值是否越来越精确。** 这些方面涉及估计量的无偏性、有效性及相合性这三个概念

一、无偏性

由于需要估计的参数是一个**确定的数**，而它的**估计量是随机变量**。对于不同的样本值观测值，就会得到不同的估计值。因此，我们要确定一个估计量的好坏，不能仅仅依据**一次抽样的结果来衡量**，而必须依据**多次抽样的平均结果来衡量**，也就是希望待估参数与它的估计量的**偏差的平均值等于零**，这就是所谓的**无偏性的概念**。

定义1 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的估计量, 如果任给 $\theta \in \Theta$, 都有 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计量**

◆ 一个估计量如果不是无偏的就称它是有偏估计量, 并称 $E(\hat{\theta}) - \theta$ 为以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计的**偏差**或简称**偏**. 无偏估计的实际意义就是无系统误差

◆ 若 $E(\hat{\theta}) - \theta \neq 0$, 但当样本容量 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E(\hat{\theta}) - \theta] = 0$$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计量.

例9 设总体 X 的数学期望 μ 与方差 σ^2 存在, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的样本, 证明:

(1) $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的无偏估计量;

(2) $\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^n c_i X_i$, 其中 $\sum_{i=1}^n c_i = 1, c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 也是 μ 的无偏估计量;

(3) 样本 k 阶原点矩 A_k 是 k 阶总体矩 α_k 的无偏估计量;

(4) $\hat{\sigma}_1^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量;

(5) $\hat{\sigma}_2^2 = M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ **不是** σ^2 的无偏估计量.

例10 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的一个样本, 考察 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 和最大似然估计 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$ 的无偏性

解: 因为 $E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = \theta$

所以, 矩估计 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计量

又因为 $X \sim U(0, \theta)$, 概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此, $\hat{\theta}_2$ 概率密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以有

$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_{(n)}}(x) dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1} \theta$$

显然 $E(X_{(n)}) \neq \theta$

故 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$ **不是** θ 的无偏估计量, 但 $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n} \hat{\theta}_2$ **是** θ 的无偏估计量

二、有效性

估计量的取值在参数的真值附近摆动，显然这种摆动范围越小越好。而方差反映了这种摆动的范围。因此同一个参数的众多无偏估计量中方差小的哪一个应该较好。

定义2 设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计, 如果

$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ **有效**

有效性的意义是: 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ 时, 除无系统偏差外, 还要求估计精度高

例11 例10中证明了估计量 $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 和 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 都是 θ 的无偏估计量. 现证明当 $n \geq 2$ 时, $\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效

证明: 因为

$$D(\hat{\theta}_1) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n} D(X) = \frac{\theta^2}{3n}$$

而

$$D(\hat{\theta}_3) = D\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(X_{(n)})$$

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1} \theta$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$D(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - [E(X_{(n)})]^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \theta^2$$

所以

$$D(\hat{\theta}_3) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

又 $n \geq 2$, 所以 $D(\hat{\theta}_3) < D(\hat{\theta}_1)$, 故 $\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

例12 设总体 X 的数学期望 μ 方差 σ^2 存在, X_1, X_2 是 X 的样本, 证明估计 μ 时

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 \text{ 较 } \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4} X_1 + \frac{3}{4} X_2 \text{ 有效}$$

证明: 因为 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ 均为 μ 的无偏估计, 又因为

$$D(\hat{\mu}_1) = D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2\right) = \frac{1}{4} D(X_1) + \frac{1}{4} D(X_2) = \frac{1}{2} \sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2) = D\left(\frac{1}{4} X_1 + \frac{3}{4} X_2\right) = \frac{1}{16} D(X_1) + \frac{9}{16} D(X_2) = \frac{5}{8} \sigma^2$$

所以 $D(\hat{\mu}_1) < D(\hat{\mu}_2)$

由定义知 $\hat{\mu}_1$ 较 $\hat{\mu}_2$ 有效

三、相合性(一致性)

无偏性和有效性，都是在样本容量 n 确定的情况下讨论的. 一个统计量即便是方差比较小，这在应用上或者理论上还不够，我们还希望当样本容量 n 趋于无穷时，估计量任意接近于参数真值的可能性越来越大，由此又有所谓的相合性（一致性）定义

定义3 设 $\hat{\theta}_n$ 是未知参数 θ 的估计量, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的**相合估计量或一致估计量**. 即 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

如果, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}_n$ 均方收敛于 θ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right\} = 0$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的**均方相合估计量**. 即 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L^2} \theta (n \rightarrow \infty)$

例13 设总体 X 的数学期望 μ 与方差 σ^2 存在, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的样本, 证明 $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的相合估计量

证明 由辛钦大数定理可知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X}_n - E(X)| < \varepsilon\} = 1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\mu}_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

例14 设总体 $X \sim U(0, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的样本, 证明

$\hat{\theta} = X_{(n)}$ 是 θ 的相合估计量

证明: $X_{(n)}$ 概率密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1} \theta$$

$$D(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2$$

$$\begin{aligned}
 P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| \geq \varepsilon\right\} &=P\left\{\left|\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)-\frac{1}{n+1} \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \\
 &\leq P\left\{\left|\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right|+\frac{1}{n+1} \theta \geq \varepsilon\right\}=P\left\{\left|\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right| \geq \varepsilon-\frac{1}{n+1} \theta\right\} \\
 &\leq \frac{D\left(\hat{\theta}\right)}{\left(\varepsilon-\frac{1}{n+1} \theta\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

切比雪夫不等式P107

故 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, 即 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计

7.3 区间估计

为了估计总体 X 的未知参数 θ ，通过样本寻求一个区间，并且给出此区间包含参数 θ 真值的可信程度。

这就是总体未知参数的区间估计问题

估计你的年龄 八成可能性在18 - 24岁之间

↓
被估参数

↓
可信度

↓
范围、区间

可信度：越大越好

区间：越小越好

➤ 区间估计的目的:

找出未知参数 θ 的一个变化范围

使得该范围包含 θ 的真值的概率为 $1-\alpha$

- ◆ 在区间估计理论中, 被广泛接受的一种观点是**置信区间**, 它是由奈曼 (Neymann) 于1934年提出的

➤ 双侧置信区间

定义 设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$, θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体的样本. 设 α 满足 $0 < \alpha < 1$, $\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是两个统计量. 若 $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, $(1-\alpha)$ 称为置信水平(置信度). $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信度为 $(1-\alpha)$ 的双侧置信下限与双侧置信上限

这种估计 θ 的方法叫做区间估计

➤ 置信区间的特性

1) 是随机的

被估计的参数 θ 虽然未知，但它是一个**常数**，没有随机性，而**区间** $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ **是随机的**。

随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含着参数 θ 的真值，而**不能说**参数 θ 以 $1-\alpha$ 的概率落入随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

➤ 另外定义中的表达式 $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$ 还可以描述为：

若反复抽样多次（各次得到的样本容量相等，都是 n ），每个样本值确定一个区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ ，每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值，按**伯努利大数定理**，在这些区间中，包含 θ 真值得约占 $1 - \alpha$ ，不包含的约占 α 。

2) 置信区间可能包含 θ 的真值，也可能不包含；对于一个特定样本

$$p\{\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) < \theta < \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)\} = 1 \\ \Rightarrow \theta \in (\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n))$$

$$p\{\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)\} = 0 \\ \Rightarrow \theta \notin (\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n))$$

$1-\alpha$ 反映了不等式 $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ 的可靠性

3) 两难性(Dilemma)

$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 大, $1-\alpha$ 大, 但参数 θ 的不确定性大

$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 小, $1-\alpha$ 小, 但参数 θ 的确定具有较高的精度

➤ 评价置信区间好坏标准

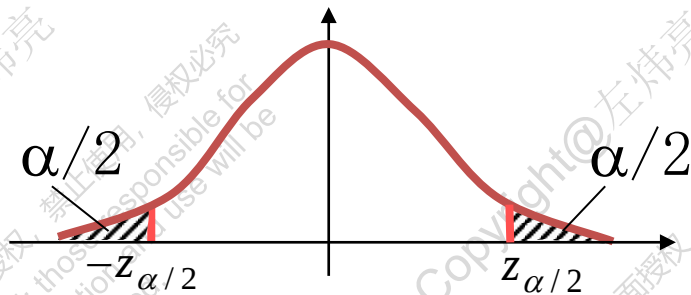
(1)精度: $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 越小越好; 一般是让 $E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$ 越小越好

(2)置信度: $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\}$ 越大越好

◆ 置信度与估计精度是一对矛盾. 一般准则: 在保证置信度的条件下尽可能提高精度

例14 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的样本, 求 μ 的置信度为 $(1-\alpha)$ 的置信区间

解: $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计, 且 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$



对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right| < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

所以
$$P\left\{\bar{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

得 μ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的置信区间为:

$$\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

也可写成

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$$

注

1)例如当 $\alpha = 0.05$ 时, 即 $1 - \alpha = 0.95$ 又若 $\sigma = 1, n = 16$

查表得 $\frac{\alpha}{2} = 0.025, z_{0.025} = 1.96$

于是得到一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96, \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96\right) \text{ 即 } (\bar{X} \pm 0.49)$$

2)若样本值为 $\bar{x} = 5.20$, 则得到一个置信区间

(5.20 ± 0.49) 即 $(4.71, 5.69)$ 说明 μ 的真值

含在 $(4.71, 5.69)$ 的可信程度为95%

➤ 寻求置信区间的步骤

- (1) 寻求一个样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的函数 $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ 它包含待估计的参数 θ , 但不含任何未知参数, 求出 Z 的分布, 并且此分布不依赖于任何未知参数, 当然也不依赖于待估参数, 称它为枢轴量
- (2) 适当选取两个常数 a, b , 使对给定的 $1-\alpha$, 有 $P\{a < Z < b\} = 1-\alpha$
- (3) 利用不等式运算, 将不等式

等价变形为 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$

得 $P\{a < Z < b\}$

$$= P\left\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)\right\} = 1-\alpha$$

此时参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

构造方式不同置信区间也不同，如上例 $\alpha = 0.05$

也有

$$P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$$

$$P\left\{\bar{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot z_{0.01} < \mu < \bar{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot z_{0.04}\right\} = 0.95$$

这样得到 μ 的置信度为0.95的另一个置信区间

$$\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot z_{0.01}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot z_{0.04}\right)$$

7.4 正态总体均值与方差的区间估计

1. 单个正态总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的样本, 求 μ, σ^2 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间

(1) σ^2 为已知时, 均值 μ 的置信区间

σ^2 为已知时, 因为 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计, 且 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 由前面的

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \quad \text{即} \quad P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

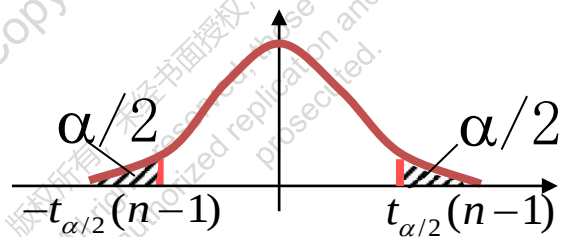
故 μ 的置信度水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) \quad \text{或} \quad \left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

(2) σ^2 未知, 求 μ 的置信区间

σ^2 为未知时, 因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计量, 所以用 S 替换(1)中的 σ , 则有

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

有
$$P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

求得 μ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

例15 有一大批糖果，现从中随机地取16袋，称得重量（以克计）如下：506 508 499 503 504 510 497 512 514 505 493 496 506 502 509 496，设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间

解： σ^2 未知， $1-\alpha=0.95$ ， $\alpha/2=0.025$ ， $n-1=15$ ，因此有

$\bar{x} = 503.75$, $s = 6.2022$ 查表得， $t_{0.025}(15) = 2.1315$

由公式得均值 μ 的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \right) \text{ 即 } (500.44, 507.06)$$

- ◆ 这就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4与507.1之间，这个估计的可信程度为95%。若以此区间内任一值作为 μ 的估计值，其误差不大于 $\frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克)，这个误差估计的可信程度为95%

(3) 方差 σ^2 的置信区间 (μ 未知)

σ^2 的无偏估计量为 S^2 ，当 $1-\alpha$ 给定后，

因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\text{故 } P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

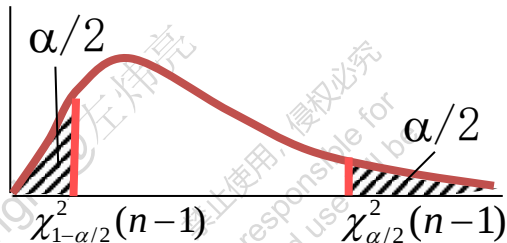
$$\text{即 } P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

得到方差 σ^2 和标准差 σ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间分别为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

和

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \right)$$



例16 有一大批糖果,现从中随机地取16袋,称得重量以克计)

如下: 506 508 499 503 504 510 497 512 514 505 493

496 506 502 509 496,设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体标准差 σ 的置信度为0.95的置信区间.

解: 现在 $\alpha/2 = 0.025, 1 - \alpha/2 = 0.975, n - 1 = 15$

查表得 $\chi_{0.025}^2(15) = 27.488, \chi_{0.975}^2(15) = 6.262,$

又 $s = 6.2022$, 因此

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \right)$$

得所求的标准差 σ 的置信区间为 (4.58, 9.60)

2. 两个正态总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是 X 的样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是 Y 的样本. 这两组样本相互独立, $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别为第一、二个总体的样本均值与方差.

(1) 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间 (置信度为 $(1-\alpha)$)

◆ σ_1^2, σ_2^2 均为已知: 因 $\bar{X} - \bar{Y}$ 为 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计量, 而

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \quad \text{故} \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

即得 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

◆ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知

由定理6.9

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}$$

从而可得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

例17 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(m/s)$, 标准差 $s_1 = 1.1(m/s)$. 随机地取II型子弹20发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_2 = 496(m/s)$, 标准差 $s_2 = 1.20(m/s)$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且由生产过程可认为它们的方差相等. 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间.

解: 按实际情况, 认为分别来自两个总体的样本是相互独立的. 又由假设两总体的方差相等, 但数值未知, 故可用统计量

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

得置信区间:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

由于 $1 - \alpha = 0.95$, $\alpha / 2 = 0.025$

$$n_1 = 10, n_2 = 20, n_1 + n_2 - 2 = 28, \quad t_{0.025}(28) = 2.0484$$

$$S_w^2 = (9 \times 1.10^2 + 19 \times 1.20^2) / 28, s_w = \sqrt{s_w^2} = 1.1688$$

故所求的两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间是

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(28) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}} \right) = (4 \pm 0.93)$$

即 $(3.07, 4.93)$

例18 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见，在实验工厂先进行试验，设采用原来的催化剂进行了 $n_1=8$ 次试验，得到得率的平均值 $\bar{x}_1 = 91.73$ ，样本方差 $s_1^2 = 3.89$ ；又采用新的催化剂进行了 $n_2=8$ 次试验，得到得率的均值 $\bar{x}_2 = 93.75$ ，样本方差 $s_2^2 = 4.02$ ，假设两总体都可认为服从正态分布，且方差相等，试求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间.

解：由题意取统计量

$$\frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

得置信区间： $\left(\overline{X_1} - \overline{X_2} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 3.96$$

计算得，则求的置信区间为

$$\left(\overline{x_1} - \overline{x_2} \pm t_{0.025}(14) s_w \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} \right) = (-2.02 \pm 2.13)$$

即(-4.15, 0.11)

由于所得置信区间包含零，在实际中我们就认为采用这两种催化剂所得的得率的均值没有显著差别

(2) 两个总体方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况。

$$\text{由于 } \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{即 } P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right\} = 1 - \alpha$$

于是得 σ_1^2 / σ_2^2 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

例19 研究由机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器A生产的管子16只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$ ；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$ 。设两样本相互独立，且设由机器A、机器B生产的管子的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，这里 $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知。试求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为0.90的置信区间

解 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right)$$

$$n_1 = 16, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29, \alpha = 0.10$$

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(15, 12) = 2.62$$

$$F_{0.95}(15, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 15)} = \frac{1}{2.42}$$

σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 **0.90** 的置信区间为
(0.45, 2.83)

由于 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间包含1, 在实际中我们就认为两者没有显著差别

➤ 单侧置信区间

对于给定值 α ($0 < \alpha < 1$)，若由样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，对任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha$$

称随机区间 $(\underline{\theta}, \infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间， $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限。

又若统计量 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，对任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$$

称随机区间 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间， $\bar{\theta}$ 称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限。

例如 对于正态总体 X , 若均值 μ 方差 σ^2 均为未知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个样本, 求分别求 μ 和 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

解: 由定理6.8知 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

查 t 分布表, 得 $t_{\alpha}(n-1)$ 使 $P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$

即 $P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$

于是得到 μ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \infty\right)$$

μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限为 $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$

又由
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

有
$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

即
$$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\} = 1 - \alpha$$

于是得 σ^2 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right)$$

σ^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限为
$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$$

例20 从一批灯泡中随机地取5只作寿命试验, 测得寿命 (以小时计) 为 1050 1100 1120 1250 1280, 设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命平均值 μ 的置信度为0.95的单侧置信下限.

解: μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$$

$$1 - \alpha = 0.95, n = 5, t_{n-1}(\alpha) = t_4(0.05) = 2.1318$$

$$\bar{x} = 1160, s^2 = 9950$$

得所求单侧置信下限为 $\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{5}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) = 1065$